COMPOSITION DE MATHEMATIQUES (M')

Durée : 4 heures

Epreuve commune aux ENS de Cachan et Lyon

Avertissement : Les parties IV et V du problème (plus algébriques) sont indépendantes des parties I à III (plus topologiques) une fois admis le résultat de la question III.5. Le candidat est libre de traiter le problème dans l'ordre qu'il souhaite en admettant clairement des résultats énoncés dans des questions précédentes du problème. Il sera tenu le plus grand compte de la clarté et de la précision de la rédaction.

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension finie. Le produit scalaire de $x, y \in \mathrm{E}$ est noté $< x, y >$ et la norme euclidienne de $x \in \mathrm{E}$ est notée $|x|$.

I. Généralités sur les convexes compacts de E.

Soit C un compact convexe (non vide) de E. Soit H un hyperplan affine de E d'équation $\varphi - \lambda = 0$, où φ est une forme linéaire non nulle sur E et λ un réel.

I.1 Montrer qu'on peut écrire de façon unique $\mathrm{E} \setminus \mathrm{H}$ comme réunion de deux ouverts convexes disjoints H^+ et H^-.

DÉFINITION : On dit que H est un hyperplan d'appui de C si H rencontre C et si $C \setminus H$ est entièrement contenu dans l'un des ouverts H^+ ou H^-.
Soit $x \in \mathrm{E}$.

I.2 Montrer que l'ensemble $\{|x - c|, c \in C\}$ admet une borne inférieure atteinte.

On note $\mathrm{d}(x, C)$ cette borne inférieure.

I.3 Montrer que l'ensemble $A_x = \{c \in C / \ |x - c| = \mathrm{d}(x, C)\}$ est réduit à un unique élément. [Indication : si $c_1, c_2 \in A_x$, considérer le milieu de $[c_1, c_2]$].

On note $p(x)$ cet élément.

I.4 Montrer que, pour tout $c \in C$, le produit scalaire $< p(x) - x, p(x) - c >$ est ≤ 0. Donner une interprétation géométrique de cette inégalité.

I.5 Montrer que l'application $\begin{cases} \mathrm{E} & \to & C \\ x & \longmapsto & p(x) \end{cases}$ est continue.

Soit $(x_k)_{k \in \mathbf{N}}$ une suite de points de $\mathrm{E} \setminus \mathrm{C}$ convergeant vers un point $c \in C$. Soit k un entier. On note H_k l'hyperplan affine passant par $p(x_k)$ et orthogonal à la droite $(x_k, p(x_k))$.

I.6 Montrer que H_k est un hyperplan d'appui de C pour tout k [Indication: on pourra utiliser la question 4].

I.7 Montrer l'existence d'un hyperplan d'appui de C passant par c.

II. Points extrémaux.

Soit c un point de C. On dit que c est un point extrémal de C si c n'est *intérieur* à aucun segment contenu dans C, c'est-à-dire que si c est contenu dans un segment de C, alors ce segment est réduit à $\{c\}$. *Remarque* : On pourra remarquer que la notion de point extrémal ne dépend pas de la norme euclidienne choisie : c'est une notion affine.

II.0 Exemples : Quels sont les points extrémaux d'un segment de droite, d'un carré (plein) du plan, d'un disque du plan ? (On justifiera les réponses)

II.1 On suppose que c est contenu dans un hyperplan d'appui H de C. Montrer que c est un point extrémal de C si et seulement si c'est un point extrémal du convexe compact $C \cap H$.

II.2 On suppose que c est un point *intérieur* de C. Montrer qu'il existe $x, y \in C$ tels que :

(i) $c \in [x, y]$
(ii) x et y sont contenus dans des hyperplans d'appui.

II.3 Montrer que C est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux (c'est-à-dire l'ensemble de tous les barycentres à coefficients positifs ou nuls des points extrémaux de C).

III. Matrices bistochastiques.

Soit $n \geq 1$ un entier. On dit qu'une matrice de $M_n(\mathbf{R})$ est *jolie* si la somme des éléments de chaque ligne et la somme des éléments de chaque colonne est 0. On note J_n l'espace vectoriel des jolies matrices.

III.1 Montrer l'égalité $\dim J_n = n^2 - 2n + 1$.
On dit qu'une matrice $M \in M_n(\mathbf{R})$ est *bistochastique* si elle est à coefficients ≥ 0 et si $M - Id$ est jolie. On note B_n l'ensemble (convexe) des matrices bistochastiques.

III.2 Montrer que B_n est compact.

On note $\{1, \ldots, n\}$ l'ensemble des entiers compris (largement) entre 1 et n. Pour toute matrice $M \in M_n(\mathbf{R})$ et tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, on note $c_{i,j}(M)$ le coefficient de la $i^{\text{ème}}$ colonne et de la $j^{\text{ème}}$ ligne. Soient α, β deux applications (non nécessairement bijectives) de $\{1, \ldots, n\}$ dans $\{1, \ldots, n\}$ telles que $\alpha(i) < \beta(i)$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. On note

$$C_{\alpha,\beta} = \{M \in M_n(\mathbf{R}) / \forall i \in \{1, \ldots, n\},\ c_{i,j}(M) = 0 \text{ si } j \neq \alpha(i), \beta(i)\}.$$

Soit B une matrice bistochastique telle que

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\},\ c_{i,\alpha(i)}(B) > 0 \text{ et } c_{i,\beta(i)}(B) > 0.$$

III.3 Montrer que B n'est pas un point extrémal de B_n [Indication : on pourra considérer l'identité $B = \frac{B+\epsilon C}{2} + \frac{B-\epsilon C}{2}$ pour $\epsilon > 0$ et $C \in C_{\alpha,\beta}$ bien choisis].

III.4 Quels sont les points extrémaux de B_n ? En particulier, combien y en a-t-il ? Exemple : donner une décomposition explicite de la matrice bistochastique dont tous les coefficients valent $\frac{1}{n}$ comme barycentre des points extrémaux de B_n.

Soit $M \in M_n(\mathbf{R})$ une matrice. On définit le permanent $\mathrm{per}(M)$ par

$$\mathrm{per}(M) = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{n} c_{i,\sigma(i)}(M)$$

où S_n est le groupe des permutations de $\{1, \ldots, n\}$.

III.5 Montrer que le permanent d'une matrice bistochastique M est > 0. En particulier, montrer qu'il existe $\sigma \in S_n$ tel que $c_{i,\sigma(i)}(M) > 0$ pour $i = 1, \ldots, n$.

III.6 Montrer que $m_n = \min_{M \in B_n} \mathrm{per}(M)$ est > 0.

IV. Inégalités sur les permanents de matrices à coefficients ≥ 0.

Pour toute matrice (rectangle) et tout couple d'indices (i, j), on note $M_{i,j}$ la matrice extraite d'indice (i, j), c'est-à-dire la matrice extraite de M en ôtant la colonne d'indice j et la ligne d'indice i de M. Désormais, n est un entier ≥ 2. Comme pour le déterminant, la multilinéarité du permanent donne les formules

$$\mathrm{per}(M) = \sum_k c_{k,j}(M)\mathrm{per}(M_{k,j}) = \sum_k c_{i,k}(M)\mathrm{per}(M_{i,k}).$$

On pourra remarquer également que le permanent est invariant par permutation de lignes ou de colonnes.
Si $x_1, \ldots, x_n$ sont des vecteurs de $\mathbf{R}^n$, on note $(x_1, \ldots, x_n)$ la matrice dont la colonne d'indice i est x_i, $i = 1, \ldots, n$ et $\mathrm{per}(x_1, \ldots, x_n)$ son permanent. Soient $x_1, \ldots, x_{n-1}$ des vecteurs de $]0, +\infty[^n$ et $x \in \mathbf{R}^n$ quelconque.

On se propose de montrer la propriété $\mathcal{P}_n$ suivante par récurrence sur n :
Si $\mathrm{per}(x_1, \ldots, x_{n-1}, x) = 0$, alors $\mathrm{per}(x_1, \ldots, x_{n-2}, x, x) \leq 0$ avec égalité si et seulement si $x = 0$.

IV.1 Traiter le cas $n = 2$.

Soit $n \geq 3$ un entier. On suppose que $\mathcal{P}_{n-1}$ est vraie.

IV.2 Soient $x_1, \ldots, x_{n-2}$ des vecteurs de $]0, +\infty[^n$. On note $e_n = {}^t(0, \ldots, 0, 1)$ le dernier vecteur de la base canonique de $\mathbf{R}^n$. Soit $x \in \mathbf{R}^n$; montrer que si $\mathrm{per}(x_1, \ldots, x_{n-2}, e_n, x)$

est nul, alors on a $\mathrm{per}(x_1,\ldots,x_{n-2},x,x) \leq 0$ avec égalité si et seulement si x est proportionnel à e_n.

IV.3 Montrer que $\mathcal{P}_n$ est vraie [Indication : pour λ convenable, on pourra considérer $\mathrm{per}(x_1,\ldots,e_n,x+\lambda x_{n-1})$].

IV.4 Soient $x_1,\ldots x_{n-1}$ des vecteurs de $]0,+\infty[^n$ et $x_n \in \mathbf{R}^n$ quelconque. Montrer l'inégalité :

$$\mathrm{per}(x_1,\ldots x_n)^2 \geq \mathrm{per}(x_1,\ldots x_{n-2},x_{n-1},x_{n-1})\mathrm{per}(x_1,\ldots x_{n-2},x_n,x_n).$$

avec égalité si et seulement si x_{n-1} et x_n sont proportionnels.

IV.5 Soit M une matrice à coefficients positifs ou nuls. Montrer pour tout i,j l'inégalité

$$\mathrm{per}(M)^2 \geq (\sum_k c_{k,i}\mathrm{per}(M_{k,j}))(\sum_k c_{k,j}\mathrm{per}(M_{k,i})).$$

V. Minimum du permanent sur B_n.

V.0 Soit f une fonction de E dans $\mathbf{R}$ de classe C^1. Soit F un sous-espace affine non vide de E défini par un nombre fini d'équations $\varphi_i - \mu_i = 0$ (où φ_i est une forme linéaire de E et μ_i un scalaire). On ne suppose pas forcément les φ_i indépendantes. On suppose que la restriction de f à F admet un extremum local en $x \in F$.

Montrer qu'il existe des scalaires λ_i tels que $df(x) = \sum_i \lambda_i\varphi_i$.

Une matrice bistochastique M est dite décomposable s'il existe une partition de $\{1,\ldots,n\}$ en deux ensembles non vides S et T tels que $i \in S$, $j \in T$ entraîne $c_{i,j}(M) = 0$. Elle est dite indécomposable sinon. On note $\mathbf{1}$ le vecteur dont toutes les composantes valent 1.

V.1 Soit M une matrice bistochastique décomposable ; considérons une partition de $\{1,\ldots,n\}$ en deux ensembles non vides S et T tels que $i \in S$, $j \in T$ entraîne $c_{i,j}(M) = 0$. Montrer que $c_{j,i}(M) = 0$ pour $i \in S$ et $j \in T$.

V.2 Montrer que si $\dim \mathrm{Ker}(M - Id) > 1$, la matrice M est décomposable [Indication: considérer $x = {}^t(x_1,\ldots,x_n) \neq \mathbf{1}$ tel que $M.x = x$ et l'ensemble des indices i tels que $x_i = \min_j x_j$].

Soit $\tilde{M} \in B_n$ une matrice réalisant le minimum du permanent sur B_n. Supposons $\tilde{M}$ décomposable (et donc est donnée une partition de $\{1,\ldots,n\}$ comme plus haut). Soit $\sigma \in S_n$ tel que $c_{i,\sigma(i)}(\tilde{M}) > 0$ pour $i = 1,\ldots,n$ (cf. III.5) et choisissons $s \in S$ et $t \in T$; soit $\tilde{M}'$ la matrice définie comme suit:

$$c_{s,\sigma(s)}(\tilde{M}') = c_{t,\sigma(t)}(\tilde{M}') = -1,\ c_{s,\sigma(t)}(\tilde{M}') = c_{t,\sigma(s)}(\tilde{M}') = 1$$

et les autres coefficients sont nuls.

V.3 Calculer $\lim_{\epsilon\to 0} \frac{\mathrm{per}(\tilde{M}+\epsilon\tilde{M}')-\mathrm{per}(\tilde{M})}{\epsilon}$. En déduire que $\tilde{M}$ est indécomposable.

V.4 Montrer que ${}^t\tilde{M}\tilde{M}$ et $\tilde{M}{}^t\tilde{M}$ sont indécomposables. [Indication : On pourra se ramener au cas où aucun des coefficients diagonaux de $\tilde{M}$ n'est nul.]

Soit Z l'ensemble des couples (i,j) tels que $c_{i,j}(\tilde{M}) = 0$.

V.5 Montrer qu'il existe des scalaires λ_i, μ_i, $i = 1,\ldots,n$ tels que $\mathrm{per}(\tilde{M}_{i,j}) = \lambda_i + \mu_j$ si $(i,j) \notin Z$.[Indication: on pourra utiliser V.0 en considérant un sous-espace affine convenable de $M_n(\mathbf{R})$.]

On note λ (resp. μ) les vecteurs colonnes ${}^t(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ (resp. ${}^t(\mu_1,\ldots,\mu_n)$).

V.6 Montrer les égalités $\tilde{M}{}^t\tilde{M}\lambda = \lambda$ et ${}^t\tilde{M}\tilde{M}\mu = \mu$. En déduire $\mathrm{per}(\tilde{M}) = \mathrm{per}(\tilde{M}_{i,j})$ pour $(i,j) \notin Z$.

V.7 On suppose $c_{1,1}(\tilde{M}) = 0$ et $c_{i,i}(\tilde{M}) > 0$ si $i > 1$. Montrer que l'on a l'inégalité $\mathrm{per}(\tilde{M}_{1,1}) \geq \mathrm{per}(\tilde{M})$ [Indication: on pourra procéder comme dans V.2 avec $\tilde{M}' = I - \tilde{M}$].

V.8 Montrer l'inégalité $\mathrm{per}(\tilde{M}_{i,j}) \geq \mathrm{per}(\tilde{M})$ pour tout i,j.

V.9 Montrer que $\mathrm{per}(\tilde{M}) = \mathrm{per}(\tilde{M}_{i,j})$ pour tout $i,j \in \{1,\ldots,n\}$ [Indication : on pourra montrer l'existence d'un indice $k \neq j$ tel que $c_{i,k}(\tilde{M}) \neq 0$ et utiliser la question IV.5].

V.10 Soient $s \neq t$ deux indices et $\tilde{M}'$ la matrice (bistochastique) déduite de $\tilde{M}$ en remplaçant les colonnes $\tilde{M}_s$ et $\tilde{M}_t$ d'indices s et t par $\frac{\tilde{M}_s+\tilde{M}_t}{2}$. Montrer que $\tilde{M}'$ et $\tilde{M}$ ont même permanent.

V.11 Soit $j \in \{1,\ldots,n\}$. En utilisant V.10, construire une matrice bistochastique N minimisant le permanent sur B_n telle que N et $\tilde{M}$ aient la même colonne d'indice j et que $c_{i,k}(N) > 0$ si $k \neq j$ et i est quelconque.

V.12 Déduire de IV.4 et V.11 que $\tilde{M} = \frac{1}{n}(\mathbf{1},\ldots,\mathbf{1})$ et $m_n = \frac{n!}{n^n}$.